Université Pierre et Marie Curie | LIM10
Licence de Mathématiques L1 | 2011-2012

Fonctions usuelles - TD4
Développements limités

Exercice 1. Etude d'une fonction définie par morceaux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) \text{ si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0 \end{cases}$

a) Ecrire les développements limités à l'ordre 4 de $\cos(x)$ et $\cosh(x)$ au point 0.

b) Montrer que f est de classe C^1 et possède un développement limité d'ordre 2 en 0 puis le calculer.

Solution de l'exercice 1.

a) On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

b) Il suffit d'étudier ce qui se passe en 0. On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ donc f est bien continue. De plus sur $\mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{\sinh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1/2$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, $f'(x) = \frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 1/2$ donc f est C^1. Il reste à calculer le DL à droite et à gauche. Pour x négatif, on a : $\cos(\sqrt{-x}) = 1 - \frac{\sqrt{-x}^2}{2} + \frac{\sqrt{-x}^4}{4!} + o(x^5) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et on trouve bien sûr la même chose de l'autre coté.

Exercice 2. Limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\exp(\arctan x) - \exp(\tan x)}{\exp(\arcsin x) - \exp(\sin x)}\right)$

Solution de l'exercice 2.

a) On a en 0 $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^2} = \frac{1}{x^2(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3))} = \frac{1}{x^2}(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^4))$. La limite cherchée est donc $\frac{1}{3}$.

b) On a en 0 $\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$. Donc la limite cherchée est $-\frac{1}{2}$. On en déduit facilement que la deuxième limite est $\exp(-\frac{1}{2})$.

c) On calcule tout à l'ordre 3 et on obtient $\frac{(1+(x-\frac{x^3}{3})+(\frac{x^2}{2})+(\frac{x^3}{6}))-(1+(x+\frac{x^3}{3})+(\frac{x^2}{2})+(\frac{x^3}{6}))}{(1+(x+\frac{x^3}{6})+(\frac{x^2}{2})+(\frac{x^3}{6}))-(1+(x-\frac{x^3}{6})+(\frac{x^2}{2})+(\frac{x^3}{6}))} + o(1) = -2 + o(1)$

Exercice 3. Fonctions C^2

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de $\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Calculer, au moyen des dérivées de f la limite de $\frac{xf(x)-f(x^2)}{(f(x))^3}$ quand x tend vers 0.

Solution de l'exercice 3.

a) On a $f(x) = 0 + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$ et $f(-x) = 0 - xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x^2} = f''(0)$.

b) On a $xf(x) = 0 + x^2f'(0) + \frac{x^3}{2}f''(0) + o(x^3)$, $f(x^2) = 0 + x^2f'(0) + o(x^3)$, $(f(x))^3 = 0 + x^3f'(0)^3 + o(x^3)$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xf(x)-f(x^2)}{(f(x))^3} = \frac{f''(0)}{2f'(0)^3}$.

Exercice 4. Étude de comportement asymptotique

a) Donner les limites en l'infini des fonctions suivantes puis leur développement limité 'en l'infini', càd dans la base des $\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}...\}$

$$\frac{x}{x-1} \qquad \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
$$e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \qquad \sqrt{1+x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) Faire une étude détaillée de la fonction

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x+1}$$

En particulier, on recherchera une asymptote oblique au voisinage de l'infini et la position relative du graphe de f par rapport à celle-ci.

Solution de l'exercice 4. Le développement en l'infini à l'ordre 2 donne :

$$\frac{f(x)}{|x|} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{3}{8}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ce qui permet d'étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote $y = x - \frac{1}{2}$ en $+\infty$ et $y = -x + \frac{1}{2}$ en $-\infty$. Les asymptotes peuvent donc être vues comme des tangentes en l'infini !