Université Pierre et Marie Curie — LIM10
Licence de Mathématiques L1 — 2011-2012

Fonctions usuelles - TD1
Logarithme

Exercice 1. Echauffement

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausse :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp(\ln(x)) = x$
b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$
c) $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$, la dérivée de $f(x) = x\ln(x) - x$ est $f'(x) = \ln(x)$
d) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^{+*}$, $a^x = \exp(a\ln(x))$
e) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x)\ln(y) = \ln(x+y)$

Solution de l'exercice 1.
a) faux c'est $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$
b) vrai
c) vrai
d) faux c'est $a^x = \exp(x\ln(a))$
e) faux c'est $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$

Exercice 2. Resolution d'equations

Résoudre les équations suivantes :

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^{(1-x)} = \frac{2}{3} \tag{1}$$
$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \tag{2}$$
$$2^{x^3} = 3^{x^2} \tag{3}$$

Solution de l'exercice 2.
(1) On prend le ln de l'équation pour obtenir $2x\ln(\frac{2}{3}) + 3(1-x)\ln(\frac{2}{3}) = \ln(\frac{2}{3})$. En simplifiant, on obtient $x = 2$.
(2) On prend encore le ln de l'équation pour obtenir $\sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x)$ ce qui donne $x = 4$.
(3) On prend toujours le ln pour avoir $x^3\ln(2) = x^2\ln(3)$ ce qui donne $x = 0$ ou $x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$

Exercice 3. Etude de fonction 1

Soit $f\ :\ ]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe $x\ln(x)$.

a) Quelle est la limite de f quand x tend vers zéro ?
b) Calculer la dérivée de f et tracer la courbe représentative de f.
c) Résoudre $x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution de l'exercice 3.

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

b) $f`(x) = \ln(x) + 1$ qui s'annule en e^{-1} et qui est négative avant et positive après.

c) On prend le ln de l'équation ce qui donne $x \ln(x) = -\frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\ln(\frac{1}{4})$. On a donc deux solutions, $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{4}$ et par le tableau de variation, on voit que ce sont les seules.

Exercice 4. Etude de fonction 2

On considère la fonction $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

a) Donner son domaine de définition

b) Etudier ses variations et ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.

c) Expliquer pourquoi il y a un unique point x_1 appartenant à l'intervalle de définition tel que $f(x_1) = 0$. Le déterminer.

d) Calculer $f((e^e)^e)$

Solution de l'exercice 4.

a) On doit avoir $\ln(\ln(x)) > 0$ ie $\ln(x) > 1$ ie $x > e$. Donc le domaine de définition est $]e; +\infty[$.

b) On a $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))} > 0$. De plus, $\lim_{x \to e} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) Par le théorème des valeurs intermédaires et puisque la dérivée est strictement positive, il y a une seule solution à l'équation qui est $x = e^e$

d) On a $f((e^e)^e) = \ln(2)$