Université Pierre et Marie Curie — LIM10
Licence de Mathématiques L1 — 2011-2012

Polynômes - TD4
$\mathbb{R}[X]$ et l'analyse

Exercice 1. Echauffement

a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$, avec $a_n \neq 0$. Décrivez le comportement de $P(x)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.

b) Esquissez les graphes des polynômes suivants, vus commes des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\text{i) } 2X^2 + 4X + 3 \quad \text{ii) } X^3 + 2X^2 - X - 2 \quad \text{iii) } -4X^4 + 4X^2 - 1$$

Exercice 2. Racines réelles

a) Montrer que chaque polynôme de degré impair à coefficients réels admet une racine réelle

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}$. Montrer que P' est également scindé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Formule de Taylor

a) Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$. On désigne par $P^{(k)}$ la k-ième dérivée de P. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}$, on ait

$$P(a+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k \quad \text{(Formule de Taylor)}$$

b) Trouver le polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5, tel que $P(1) = 1$, $P'(1) = 1$, $P''(1) = 2$, $P^{(3)}(1) = 6$, $P^{(4)}(1) = 24$, $P(0) = 0$.

Exercice 4. Polynôme interpolateur de *Lagrange*. Soient $a_1 < \cdots < a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus $n-1$ (appelé le "polynôme interpolateur de *Lagrange*"), tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i.

a) Pour $i = 1, \ldots, n$, trouver un polynôme L_i de degré $n-1$ tel que $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ (symbole de *Kronecker*).

b) Construire à partir des L_i, $i = 1, \ldots, n$, un polynôme P avec $P(a_i) = b_i$ pour tout i.

c) Soit Q un polynôme de degré au plus $n-1$, tel que $Q(a_i) = b_i$ pour tout i. Montrer que $Q = P$. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose pas que $\deg Q \leq n-1$?

d) Donner les polynômes de degré 2 ou moins ayant les mêmes valeurs que $\sin(x)$ en

$$\text{i) } -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \quad \text{ii) } -\pi, 0, \pi \quad \text{iii) } -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$