Université Pierre et Marie Curie — LIM10
Licence de Mathématiques L1 — 2011-2012

Polynômes - TD3
Fractions rationnelles

Exercice 1. On y va. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ (pour les parties g) et h) en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$) :

a) $\dfrac{1}{(X-1)(X+2)}$ b) $\dfrac{2X+1}{(X-3)(X+1)}$ c) $\dfrac{X^2+1}{X^3-X^2-6X}$

d) $\dfrac{X^2}{(X-1)^2}$ e) $\dfrac{X^5+1}{X^3-X^2+X-1}$ f) $\dfrac{X^2-1}{X^4+2X^2+1}$

g) $\dfrac{X+2}{X^2-(a+1)X+a}$ h) $\dfrac{2X}{X^2+a}$ i) $\dfrac{1}{X^n-1}$

Solution de l'exercice 1.

a) $\dfrac{1}{3(X-1)} - \dfrac{1}{3(X+2)}$

b) $\dfrac{7}{4(X-3)} + \dfrac{1}{4(X+1)}$

c) $\dfrac{2}{3(X-3)} - \dfrac{1}{6X} + \dfrac{1}{2(X+2)}$

d) $1 + \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$

e) $\mathbb{R} : X^2 + X + \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{X}{X^2+1}$, $\mathbb{C} : X^2 + X + \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{2(X-i)} - \dfrac{1}{2(X+i)}$

f) $\mathbb{R} : \dfrac{1}{X^2+1} - \dfrac{2}{(X^2+1)^2}$, $\mathbb{C} : \dfrac{1}{2(X+i)^2} + \dfrac{1}{2(X-i)^2}$

g) $a = -2 : \dfrac{1}{X-1}$, $a \neq -2 : \dfrac{a+2}{(a-1)(X-a)} - \dfrac{3}{(a-1)(X-1)}$

h) $a < 0 : \dfrac{1}{X-\sqrt{|a|}} + \dfrac{1}{X+\sqrt{|a|}}$, $a = 0 : \dfrac{2}{X}$

$a > 0 : \mathbb{R} : \dfrac{2X}{X^2+a}$, $\mathbb{C} : \dfrac{1}{X-i\sqrt{a}} + \dfrac{1}{X+i\sqrt{a}}$

i) Les racines de $X^n - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité, le résidu en $e^{i2\pi k/n}$ est égal à $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(X^n-1))^{-1}|_{X=e^{i2\pi k/n}}$. La solution est donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-i2\pi k/n}}{X - e^{i2\pi k/n}}$$

Exercice 2. Calculer la valeur des sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Solution de l'exercice 2.

a) On écrit $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et on obtient ainsi une somme téléscopique de valeur 1.

b) Pareil, on écrit

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) - \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big)\right],$$

et on obtient une somme téléscopique qui vaut $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 3. Relation entre les racines de P et P'. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P = n \geq 1$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ ses racines (comptées avec leur multiplicité).

a) Montrer que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i}.$$

b) Soit a une racine de P'. Déduire de a) qu'il existe des réels *positifs* $b_1, \ldots, b_n$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a - a_i) = 0.$$

c) En déduire que chaque racine de P' s'écrit comme *combinaison convexe* des $a_1, \ldots, a_n$. *(Une combinaison convexe des $a_1, \ldots, a_n$ est un nombre $x \in \mathbb{C}$, tel que $x = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$, avec $c_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.)*

Solution de l'exercice 3.

a) On écrit $P = c(X - a_1)\cdots(X - a_n)$ pour un $c \in \mathbb{C}$. Puis utiliser la règle du produit en dérivant.

b) Si $a = a_i$ pour un i, on pose $b_j = \delta_{ij}$. Si $a \neq a_i$ pour tout i, alors on a d'après la partie a) :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a - a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{a - a_i}}{|a - a_i|^2},$$

et donc en conjugant cette équation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a - a_i}{|a - a_i|^2} = 0.$$

c) On divise par $\sum_{i=1}^{n} b_i$.