Polynômes - TD3
Fractions rationnelles

Exercice 1. On y va. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ (pour les parties g) et h) en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$) :

a) $\dfrac{1}{(X-1)(X+2)}$ b) $\dfrac{2X+1}{(X-3)(X+1)}$ c) $\dfrac{X^2+1}{X^3-X^2-6X}$

d) $\dfrac{X^2}{(X-1)^2}$ e) $\dfrac{X^5+1}{X^3-X^2+X-1}$ f) $\dfrac{X^2-1}{X^4+2X^2+1}$

g) $\dfrac{X+2}{X^2-(a+1)X+a}$ h) $\dfrac{2X}{X^2+a}$ i) $\dfrac{1}{X^n-1}$

Exercice 2. Calculer la valeur des sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Exercice 3. Relation entre les racines de P et P'. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P = n \geq 1$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ ses racines (comptées avec leur multiplicité).

a) Montrer que
$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X-a_i}.$$

b) Soit a une racine de P'. Déduire de a) qu'il existe des réels *positifs* $b_1, \ldots, b_n$, non tous nuls, tels que
$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a-a_i) = 0.$$

c) En déduire que chaque racine de P' s'écrit comme *combinaison convexe* des $a_1, \ldots, a_n$. *(Une combinaison convexe des $a_1, \ldots, a_n$ est un nombre $x \in \mathbb{C}$, tel que $x = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$, avec $c_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.)*