Intégration - TD12
Limites et Intégrales

Exercice 1. Formule de la moyenne

a) On considère $a < b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonction continues sur $[a, b]$ avec g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

b) Soit f une fonction continue au voisinage de 0, déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$ et $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}dt$

Solution de l'exercice 1.

a) f est bornée et atteint ses bornes : $m \leq f(x) \leq M$. On peut multiplier par g positive, puis on intègre et on conclut par le TVI.

b) Application directe de la formule de la moyenne avec $f(c_x) \to f(0)$ quand $x \to 0$ par continuité en 0.

Exercice 2. Calculs de limites

a) Soit $f : [0, e] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$$

b) Calculer la limite de $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n\, dx$.

Solution de l'exercice 2.

a) On pose $u_n = n\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)dx$. On fait le changement de variable $u = x^n$, pour obtenir

$$u_n = \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(u)}{u}\sqrt[n]{u}du$$

puis on utilise la relation de Chasles pour décomposer la différence entre la suite u_n et sa limite présumée en deux morceaux que l'on va contrôler différemment :

$$\begin{aligned}
\left|u_n - \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx\right| &\leq \left|\int_1^e \frac{f(x)}{x}(\sqrt[n]{x}-1)dx\right| + \left|\int_{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^e \frac{f(u)}{u}\sqrt[n]{u}\right| \\
&\leq \int_1^e \frac{|f(x)|}{x}\left|\sqrt[n]{x}-1\right|dx + \int_{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^e \frac{|f(u)|}{u}\sqrt[n]{u} \\
&\leq (\sqrt[n]{e}-1)\int_1^e \frac{|f(x)|}{x}dx + \|f\|_\infty\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Clairement les deux morceaux tendent vers 0 quand $n \to \infty$ donc la limite est bien celle cherchée.

b) Il est évident que $\forall x \in [0,1], 0 \leq (\ln(1+x))^n \leq (\ln 2)^n$. Intégrons entre 0 et 1, on obtient $0 \leq I_n \leq (\ln 2)^n$ et le majorant tend vers 0 quand $n \to \infty$ donc $I_n \to 0$ en vertu du théorème des gendarmes.

Exercice 3. Intégrales de Wallis
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) Prouver la relation de récurrence $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. En déduire que nI_nI_{n-1} est une suite constante.

d) En déduire un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.

Solution de l'exercice 3. Un grand classique..

a) $\forall t \in [0, \pi/2], 0 \leq \sin t \leq 1$, donc $0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$ et en intégrant, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle admet donc une limite positive ou nulle.

b) On va calculer cette limite directement en effectuant un *découpage*. On commence par avoir l'intuition du résultat. La fonction qu'on intègre tend vers 0 sur tout le segment sauf en $\pi/2$. On peut donc s'attendre légitimement à ce que la limite de I_n soit 0. C'est ce qu'on va prouver.

Soit $\varepsilon > 0$. On utilise la relation de Chasles pour séparer l'intégrale en deux morceaux que l'on va majorer séparément :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n t dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 quand $n \to \infty$. Donc pour n assez grand, $I_n \leq 2\varepsilon$. On vient de quantifier $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c) Ecrivons $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(1-\cos^2 t) dt = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt$. On intègre par parties la deuxième intégrale en intégrant $\sin^n t \cos t$ et en dérivant $\cos t$, et ont trouve la relation demandée. Il suffit de multiplier la relation de récurrence par nI_{n-1} pour voir que nI_nI_{n-1} est une suite constante, en particulier égale à $I_1 I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

d) On a $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$. On multiplie par I_n et on utilise $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ pur obtenir

$$\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$

D'où il est clair que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 4. Lemme de Riemann-Lebesgue

a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) e^{inx} dx = 0$$

b) On suppose seulement f continue. Le résultat subsiste-t-il ? Et si f est seulement réglée ?

Solution de l'exercice 4.

a) Quand f est $\mathcal{C}^1$, une simple intégration par parties suffit à prouver le résultat.

b) Bien sûr le résultat reste vrai pour une fonction f seulement continue ou réglée mais c'est plus difficile à démontrer. Pour f continue, une méthode astucieuse consiste à utiliser le théorème de Weierstrass qui affirme que toute fonction continue sur un segment y est uniformément approchée par une suite de polynômes. Or les polynômes, eux, sont $\mathcal{C}^1$.

   Pour les fonctions réglées, on passe encore par un argument de densité : on prouve facilement le résultat pour les fonctions charactéristiques des segments inclus dans $[a, b]$, d'où on l'obtient pour toutes les fonctions en escalier par linéarité, puis on utilise le fait que l'ensemble des fonctions réglées est défini comme l'adhérence de l'ensemble des fonctions en escalier pour la norme uniforme.