Intégration - TD12
Limites et Intégrales

Exercice 1. Formule de la moyenne

a) On considère $a < b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonction continues sur $[a, b]$ avec g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

b) Soit f une fonction continue au voisinage de 0, déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$ et $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}dt$

Exercice 2. Calculs de limites

a) Soit $f : [0, e] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$$

b) Calculer la limite de $I_n = \int_0^1 (\ln(1 + x))^n\, dx$.

Exercice 3. Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

c) Prouver la relation de récurrence $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. En déduire que nI_nI_{n-1} est une suite constante.

d) En déduire un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 4. Lemme de Riemann-Lebesgue

a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}dx = 0$$

b) On suppose seulement f continue. Le résultat subsiste-t-il ? Et si f est seulement réglée ?