Université Pierre et Marie Curie | LIM10
Licence de Mathématiques L1 | 2011-2012

Intégration - TD11
Approximation des Intégrales

Exercice 1. Sommes de Riemann

a) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_k - x_{k+1})$ avec $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_a^b f.$$

b) On suppose maintenant que f est $\mathcal{C}^1$ et on choisit $\xi_k = x_k$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_a^b f - I_n = \frac{C}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) Calculer les limites des suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

Solution de l'exercice 1.

a) En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^b f - I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(\xi_k))dx,$$

et avec l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f - I_n\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(\xi_k)|dx.$$

Comme f est continue sur le compact $[a,b]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine) : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x, y \in [a,b], |x-y] < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Fixons donc $\epsilon > 0$ arbitraire et $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f. Pour n assez grand, si $0 \leq k \leq n-1$, $|x_{k+1} - x_k| < \eta$ et a fortiori, $\forall x \in [x_k, x_{k+1}], |x - \xi_k| < \eta$. Donc $\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(\xi_k)|dx < \varepsilon(x_{k+1} - x_k)$. En sommant, on obtient

$$\left|\int_a^b f - I_n\right| \leq \varepsilon(b-a).$$

On vient de quantifier $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_a^b f$.

b) Comme précédemment, on commence par écrire

$$\int_a^b f - I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))dx.$$

Ensuite il s'agit d'estimer $f(x) - f(x_k)$ de manière un peu plus précise que dans la question a). En vertu de la formule de Taylor-Langrange, on peut trouver un réel $c_{k,x} \in]x_k, x[$ tel que $f(x) - f(x_k) = f'(c_{k,x})(x - x_k)$. Il faut faire un peu attention car $c_{k,x}$ dépend de k et de x, comme le rappelle la notation que l'on a choisi. On voudrait surtout le remplacer par quelque chose qui ne dépende pas de x pour pouvoir le sortir de l'intégrale. On écrit donc

$$\int_a^b f - I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x_k)(x - x_k)dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f'(c_{k,x}) - f'(x_k))(x - x_k)dx.$$

La première de ces intégrales est facile à manipuler car on a remplacé $c_{k,x}$ par x_k qui ne dépend pas de x. Donc $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x_k)(x - x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2/2$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f'(x_k)\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$. Mais $\sum_{k=1}^{n-1} f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ est une somme de Riemann donc en vertu de la première question, elle tend vers $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

On vient de prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x_k)(x - x_k)dx = \frac{C}{n}$ avec $C = \dfrac{(b-a)(f(b) - f(a))}{2}$.

On va maintenant montrer que la deuxième intégrale est négligeable.

Fixons $\varepsilon > 0$. f' est continue sur le compact $[a, b]$ donc elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Prenons $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f'. Si n est assez grand, on a $|x_{k+1} - x_k| < \eta$ et donc $|c_{k,x} - x_k| < \eta$ car $c_{k,x} \in]x_k, x[\subset]x_k, x_{k+1}[$. Donc

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f'(c_{k,x}) - f'(x_k))(x - x_k)dx\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(c_{k,x}) - f(x_k)|(x - x_k)dx \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)dx \\
&\leq \varepsilon \frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

On vient de quantifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f'(c_{k,x}) - f'(x_k))(x - x_k)dx = o\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui conclut la preuve.

c) Evidemment ce sont des sommes de Riemann, on trouve $u_n \to \pi/4$, $v_n \to 1/\pi - 4/\pi^3$, $w_n \to \pi/6$.

Exercice 2. Méthode des trapèzes

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.

a) Soit $\alpha, \beta \in [a, b]$. Montrer que

$$\int_\alpha^\beta f = \frac{\beta - \alpha}{2}(f(\alpha) + f(\beta)) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)f''(x)dx$$

b) En déduire que

$$\left|\int_\alpha^\beta f - \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))\right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}\|f''\|_\infty$$

c) Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. On note $I_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_a^b f - I_n\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

Exercice 3. Méthode de Gauss

a) On fixe $(a_1, \ldots, a_n) \in [-1,1]^n$. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall R \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 R(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k R(a_k)$$

b) Pour $n \geq 1$, on introduit les polynômes $T_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = T_n^{(n)}$. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 Q(x)P_n(x)dx = 0$.

c) Déduire de la question précédente que P_n a n racines simples $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $]-1,1[$.

d) Montrer qu'il existe $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^1 Q(x)dx = \sum_{k=1}^n \beta_k Q(x_k)$$

Solution de l'exercice 3.

a) Pour $1 \leq k \leq n$, on introduit les polynômes interpolateurs de Lagrange

$$L_k = \frac{\displaystyle\prod_{i\neq k}(X-a_i)}{\displaystyle\prod_{i\neq k}(a_k-a_i)},$$

de sorte que $L_k(a_i) = \delta_{ki}$. Si $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $R = \displaystyle\sum_{k=1}^n R(a_k)L_k$ car la différence est un polynôme de degré inférieur à $n-1$ qui s'annule en $a_1, \ldots, a_n$.
On en déduit que $\int_{-1}^1 R(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k R(a_k)$ avec $\alpha_k = \int_{-1}^1 L_k(x)dx$.
On vient de montrer que pour une fonction f, on peut calculer une valeur approchée de $\int_{-1}^1 f$ en évaluant $\sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k)$. Cette méthode donne le résultat exact pour tous les polynômes de degré au plus $n-1$. Comme les a_k sont choisis au hasard ici, on doit pouvoir améliorer ce résultat en prenant un choix intelligent de points d'interpolation. C'est l'objet de la méthode de Gauss, qui permet d'étendre le résultat pour tous les polynômes de degré au plus $2n-1$, ce qui est optimal. L'essentiel du travail consiste à introduire les bons points d'interpolation, ici les racines des polynômes de Legendre.

b) On effectue une intégration par partie, le crochet est nul. On itère l'opération jusqu'à ce qu'on trouve $Q^{(n)}$, qui est nul.

c) Procédons par l'absurde et supposons que P_n a p racines distinctes $x_1, \ldots, x_p$ dans $]-1,1[$ avec $0 \leq p < n$. On introduit le polynôme $Q = (X - x_1) \cdots (X - x_p)$. Clairement $Q \mid P$; on écrit $P_n = QR$. R ne s'annule pas sur $]-1,1[$. En vertu de la question précédente, $\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)dx = 0$ car $\deg Q = p < n$. Pourtant $Q(x)P_n(x) = Q^2(x)R(x)$ est de signe constant sur $]-1,1[$ (et c'est une fonction continue). Elle est donc identiquement nulle, exclu car c'est un polynôme non-nul ! Conclusion : $p \geq n$. Comme $\deg P_n = n$, $p = n$ et P_n admet n racines distinctes (et donc simples) sur $]-1,1[$.

d) Cette fois, on introduit les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux racines de P_n : pour $1 \leq k \leq n$,

$$L_k = \frac{\displaystyle\prod_{i \neq k} (X - x_i)}{\displaystyle\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}.$$

On a bien sûr $L_k(x_i) = \delta_{ki}$. Soit $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On écrit la division euclidienne de Q par P_n : soit $B, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q = BP_n + R$ avec $0 \leq \deg R < n$. Autrement dit, $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $R = \sum_{k=1}^{n} R(x_k)L_k$.

Or $\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \int_{-1}^{1} B(x)P_n(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)dx$ car en vertu de b) la première intégrale est nulle ($\deg B < n$). On pose $\beta_k = \int_{-1}^{1} L_k(x)dx$ de sorte que $\int_{-1}^{1} R(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \beta_k R(x_k)$.

D'autre part, $Q(x_k) = B(x_k)P_n(x_k) + R(x_k) = R(x_k)$. Finalement, $\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \beta_k Q(x_k)$.