

Intégration - TD10

Calcul d'intégrales, Changement de variables et Intégration par parties

Exercice 1. Calcul d'intégrales et de primitives

Calculer :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx & \text{b) } B = \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx & \text{c) } C = \int_1^2 (\ln x)^2 dx \\ \text{d) } \int (x^2-1)e^{3x} dx & \text{e) } \int \frac{dx}{1+x^3} & \text{f) } \int \frac{x^3}{x^2+2x+2} dx \\ \text{g) } \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx & \text{h) } \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} & \text{i) } \int e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx \\ \text{j) } \int \sin^4 x dx & \text{k) } \int \frac{\sin x}{1+\cos^3 x} dx & \text{l) } D = \int_0^\pi \sqrt{1+\sin x} dx \end{array}$$

Exercice 2. Une primitive sophistiquée

Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x) dx$.

Exercice 3.

a) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \int_0^{2\pi} e^{ipx} e^{-iqx} dx \quad , \quad J_{p,q} = \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx, \\ K_{p,q} &= \int_0^{2\pi} \cos px \sin qx dx \quad , \quad L_{p,q} = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx dx. \end{aligned}$$

b) Soit $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ pour $n \geq 1$. Trouver une relation de récurrence sur I_n .

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{(2^{n+1}-1)}{n+1}$$