

Polynômes - TD1

Notions élémentaires et arithmétique

Exercice 1. Echauffement

Déterminer les polynômes P vérifiant les relations suivantes :

$$P(X^2 + 1) = P(X) \quad (1)$$

$$P(2X + 1) = P(X) \quad (2)$$

$$(1 - X)P'(X) - P(X) = X^n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ fixé}) \quad (3)$$

Exercice 2. Division euclidienne

- Effectuer la division euclidienne de $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$. En déduire que ces deux polynômes sont premiers entre eux.
- Soit a un réel et n un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos(a) + X \sin(a))^n$ par $X^2 + 1$
- Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $a, b, P(a)$ et $P(b)$.
- Quel est le reste de la division euclidienne de $P_n = X^n + X + 1$ par $(X - 1)^2$?

Exercice 3. Polynômes de Tchebychev

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$P_0 = 1, P_1 = X \text{ et } P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$$

- Préciser P_2, P_3, P_4 .
- Déterminer le terme de plus haut degré de P_n
- Etudier la parité des polynômes P_n
- Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Exercice 4.

Soit $\alpha \in K$ et $P \in K[X]$. Montrer que $P(\alpha) = 0$ si et seulement si $X - \alpha \mid P$