Université Pierre et Marie Curie 2013-2014
Probabilités élémentaires - LM345

Calculs d'espérance : un jeu d'enfants

1. *(CC 2012)* Trois bébés jouent à un jeu d'éveil constitué d'une boîte munie d'une serrure et d'un trousseau de quatre clés dont une seule ouvre la boîte.

– Camille est la plus petite : à chaque tentative elle essaye une clé au hasard
– Arthur est le plus concentré : il procède avec méthode, en éliminant successivement les clés qui ne marchent pas
– Sonia, un peu étourdie, ne tient compte à chaque essai que de l'échec immédiatement précédent

a) Déterminer la loi de X (respectivement Y, Z), le nombre d'essais nécessaires à Camille (respectivement Arthur, Sonia) pour ouvrir la boîte.

b) Quel est le nombre moyen d'essais effectués par chacun ?

Solution de l'exercice 1.

Description de l'expérience aléatoire et Rappels de cours Cette exercice présente une expérience aléatoire où un enfant possède un trousseau de quatre clés dont une seule ouvre la serrure. L'enfant possède une technique d'ouverture de la serrure (basé sur des choix aléatoires). Le jeu s'arrête quand l'enfant a trouvé la bonne clé.

Le jeu est entièrement décrit l'instant d'arrêt N du jeu, et la suite des mauvaises clés choisies par l'enfant. On numérote les clés de 1 à 4 en supposant que la clé numéro 4 est la bonne. Voici des exemples de jeux :

$$\omega_1 = (1, 3, 2, 3, 2, 1) \qquad \omega_2 = (2, 3)$$

Dans le premier jeu, l'enfant a trouvé la bonne clé en 7 coups et à choisi la clé numéro 1, puis la 3, puis la 2, puis la 3, etc. dans les 6 essais qui ont précédé le dernier. Le jeu numéro deux s'est terminé en 3 essais, et l'enfant a d'abord choisi la clé 2 puis la 3 avant de finalement choisir la numéro 4. Ainsi, l'ensemble de tous les jeux possibles (càd l'ensemble de toutes les issues possibles de notre expérience aléatoire) peut s'écrire :

$$\Omega = \bigcup_{N=0}^{\infty} \{1, 2, 3\}^N$$

Il n'est pas indispensable dans une exercice (sauf bien sûr si l'énoncé nous le demande explicitement) de définir l'espace Ω : il faut simplement le penser comme une manière un peu formelle de décrire l'expérience aléatoire.

L'étape suivante est de définir une probabilité sur Ω. Cette probibilité est donnée dans chaque cas par la manière dont l'enfant choisit les clés qui est décrite dans l'énoncé. Ainsi on pourrait calculer $\mathbb{P}(\{w_1\}), \mathbb{P}(\{w_2\})$ MAIS ce n'est pas ce que l'énoncé nous demande.

Dans une exercice, la probabilité $\mathbb{P}$ est donnée dans l'énoncé (ici elle est sous-entendue par le manière dont les enfants jouent), on doit rarement la définir nous même. Il n'est pas indispensable (sauf bien sûr si l'énoncé nous le demande explicitement) de décrire $\mathbb{P}$ càd de donner la valeur de $\mathbb{P}(\{w\})$ pour tous les $w \in \Omega$ (sauf bien sûr si l'énoncé le demande)

Un exercice de probabilité est un exercice de CALCUL DE PROBABILITES D'EVENEMENTS. Ces événements sont parfois décrit par des variables aléatoire.

Rappel sur les variables aléatoires Une variable aléatoire U est une fonction $U : \Omega \mapsto \mathbb{N}, \mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{R}^d$ qui voit vérifier que U est mesurable. cela veut dire :

- *cas où U est à valeurs dans $\mathbb{N}$:* pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- *cas où U est à valeurs dans $\mathbb{R}$:* pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (borélien de $\mathbb{R}$, càd un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ fabriqué à partir d'intervalles)
- *cas où U est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$:* pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (borélien de $\mathbb{R}^d$, càd un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ fabriqué à partir de produits cartésiens d'intervalles)

l'ensemble suivant appartient à la tribu $\mathcal{F}$

$$(X \in A) = (\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)$$

Cela veut simplement dire que $(X \in A)$ est un événement dont un peu calculer la probabilité. Une variable aléatoire sert donc simplement à DECRIRE un événement dont on voudra calculer la probabilité.

Un point clé quand un énnoncé définit une variable aléatoire est de s'assurer qu'on a bien compris comment cette variable aléatoire est définie.

Loi de X Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'essai effectués par Camille pour trouver la bonne clé. X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Donner la loi de X revient à calculer les probabilités

$$\mathbb{P}(X = k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Solution 1 (reconnaître une loi connue) A chaque choix de clé, Camille a une probabilité $p = \frac{1}{4}$ de trouver la bonne clé. Les essais sont indépendants, et X est la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du premier succès. X suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$.

Solution 2 (calcul direct des probabilités)

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\text{Camille choisit la bonne clé à l'essai k et elle choisit la mauvaise clé aux essais 1 à k-1})$$

(cette étape peut ou non figurer sur votre copie, mais écrire les probabilités que vous cherchez à calculer avec des phrase vous permet au moins de comprendre ce que vous cherchez à calculer. L'étape suivante est d'écrire cela proprement en introduisant des événements). Introduisons les événements

$$A_i = \text{"Camille choisit une mauvaise clé à l'essai } i\text{"}$$

D'après l'énoncé, $P(A_i) = \frac{3}{4}$ et les A_i sont indépendants.

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(X=k) & = & \mathbb{P}(A_k^c \cap A_{k-1} \cap \cdots \cap A_1) \\
\mathbb{P}(X=k) & \underset{\text{indépendance}}{=} & \mathbb{P}(A_k^c) \times \cap \mathbb{P}(A_{k-1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_1) \\
\mathbb{P}(X=k) & = & \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}
\end{array}$$

On reconnait la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$

Loi de Y Soit Y la variable alétoire qui compte de nombre d'essais effectués par Arthur pour trouver la bonne clé. Y est à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$ car dans le pire des cas, Arthur a trois clés à éliminer. Calculons donc

$$\mathbb{P}(Y = k) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, 4$$

Introduisons les événements

$$A_i = \text{"Arthur choisit une mauvaise clé à l'essai } i\text{"}$$

Si Arthur n'a pas trouvé la clé au premier essai, il choisit ensuite entre 3 clés, si bien que $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$. Si aux deux premiers essais Arthur n'a toujours pas trouvé la clé, il choisit ensuite entre 2 clés si bien que $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(Y=1) & = & \mathbb{P}(A_1^c) = \dfrac{1}{4} \\
\mathbb{P}(Y=2) & = & \mathbb{P}(A_2^c \cap A_1) = \mathbb{P}(A_2^c|A_1)\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4} \\
\mathbb{P}(Y=3) & = & \mathbb{P}(A_3^c \cap A_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_3^c|A_2 \cap A_1)P(A_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_3^c|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1) \\
 & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4} \\
\mathbb{P}(Y=3) & = & 1 - \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(Y=2) - \mathbb{P}(Y=3) = \dfrac{1}{4}
\end{array}$$

Y suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

Loi de Z Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre d'essai effectués par Camille pour trouver la bonne clé. Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Donner la loi de Z revient à calculer les probabilités

$$\mathbb{P}(Z=k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

On intoduit à nouveau les événements

$$A_i = \text{"Sonia choisit une mauvaise clé à l'essai } i\text{"}$$

Au premier essai, Sonia choisit une clé parmi 4 au hasard, donc $\mathbb{P}(A_1) = \frac{3}{4}$. A partir de l'essai 2, si elle a choisit une mauvaise clé à l'essai précédent, Sonia va choisir au hasard une clé parmi les 3 autres, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_i|A_{i-1}) = \frac{2}{3}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}(A_1^c) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(A_k^c \cap A_{k-1} \cap \cdots \cap A_1) \\
\mathbb{P}(Z=k) &= \underbrace{\mathbb{P}(A_k^c|A_{k-1})}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\mathbb{P}(A_{k-1}|A_{k-2})}_{\frac{2}{3}} \ldots \mathbb{P}(A_2|A_1) \underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{\frac{3}{4}} \\
\mathbb{P}(Z=k) &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{3}{4} \\
\mathbb{P}(Z=k) &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \quad \text{pour} \quad k \geq 2
\end{aligned}$$

(Z n'est pas une loi connue)

Calcul des espérances L'espérance de la loi géométrique est à connaître. Pour la démontrer, on rappelle les résultat suivant de séries entières :

$$\sum_{k\geq 0} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k\geq 1} kq^k = \frac{1}{(1-q)^2}$$

On montre qu'une loi géométrique de paramètre p admet pour espérance $1/p$ (le vérifier), si bien que $E[X] = 4$.

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 = 2,5$$

L'espérance de Z est un peu plus complexe à calculer et fait appel aux même formules de séries entières que pour le calcul de l'espérance d'une loi géométrique.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{2}{3}^{k-2} \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \left[\sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \frac{2}{3}^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3}^{k-2} \right] \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{2}{3}^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3}^{k} \right] \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(1-2/3)^2} + \frac{1}{1-2/3} \right] \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{12}{4} = \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

On a donc comme le bon sens le laissait présager $\mathbb{E}[Y] < \mathbb{E}[Z] < \mathbb{E}[X]$.

2. Variables continues Soit X une variable aléatoire. Déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la variable $e^{\lambda X}$ est intégrable et calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ dans chacun des cas suivants :

a) X suit la loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$,

b) X suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$,

c) X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Solution de l'exercice 2.

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $e^{\lambda X}$ est bornée (lorsque X suit une loi uniforme sur $[a, b]$), et donc intégrable. De plus,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \int_a^b (b-a)^{-1} e^{\lambda x} dx = (\lambda(b-a))^{-1} [e^{\lambda x}]_a^b = (\lambda(b-a))^{-1} [e^{\lambda b} - e^{\lambda a}].$$

b)

$$E[e^{\lambda X}] = \int_0^{+\infty} \theta e^{(\lambda - \theta)x} dx = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda \geq \theta, \\ \frac{\theta}{\theta - \lambda} \text{ si } \lambda < \theta. \end{cases}$$

c) Pour la loi normale, en faisant le changement de variable $y = x - \lambda$, il vient $\lambda x - x^2/2 = -y^2/2 + \lambda^2/2$ et on trouve ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x - x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2 + \lambda^2/2} dy = e^{\lambda^2/2}.$$

3. Variables discrètes :(*Examen 2012*) Soit X et Y deux variables indépendantes à valeur dans $\mathbb{N}$ de lois respectives Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Poisson de paramètre $\mu > 0$.

a) Rappeler l'expression de $\mathbb{P}(X = k), k = 0, 1, \ldots$

b) Rappeler l'expression de la fonction génératrice de la loi de Poisson, i.e. $g_X(s) := \mathbb{E}(s^X), s \in [0, 1]$.

c) Donner la loi de $X + Y$. Justifier votre réponse.

d) Soit N une variable de loi géométrique de paramètre p. Rappeler sa distribution et sa fonction génératrice.

e) Donner la fonction génératrice de $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$ pù les X_i sont des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Solution de l'exercice 3.

a) $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

b) $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$.

c) Si X et Y sont indépendantes on sait que $g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$ donc $g_{X+Y}(s) = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$ Il s'agit donc d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

d) On a $\mathbb{P}(N = k) = (1 - p)p^k, k = 0, 1, \ldots$ et $g_X(s) = \frac{1-p}{1-sp}$. (on retrouve facilement se résultat si l'on se souvient de $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$)

e)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[s^Z] &= \sum_{n=0,1,2,\ldots} \mathbb{E}(s^Z \cap N = n) \\
&= \sum_{n=0,1,2,\ldots} \mathbb{E}(s^Z | N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0,1,2,\ldots} e^{n\lambda(s-1)}\mathbb{P}(N = n) \\
&= (1 - p) \sum_{n=0,1,2,\ldots} (pe^{\lambda(s-1)})^n \\
&= \frac{1 - p}{1 - pe^{\lambda(s-1)}}.
\end{aligned}
$$