Université Pierre et Marie Curie 2013-2014
Probabilités et statistiques - LM345

Dénombrement et calcul des probabilités.

1. Une ligne brisée reliant deux points $A(n, N)$ et $B(m, M)$ du plan est appelée chemin entre A et B : à chaque point du chemin, on passe au point suivant en augmentant l'abscisse de 1 et en augmentant l'ordonnée de 1 (montée) ou en la diminuant de 1 (descente).

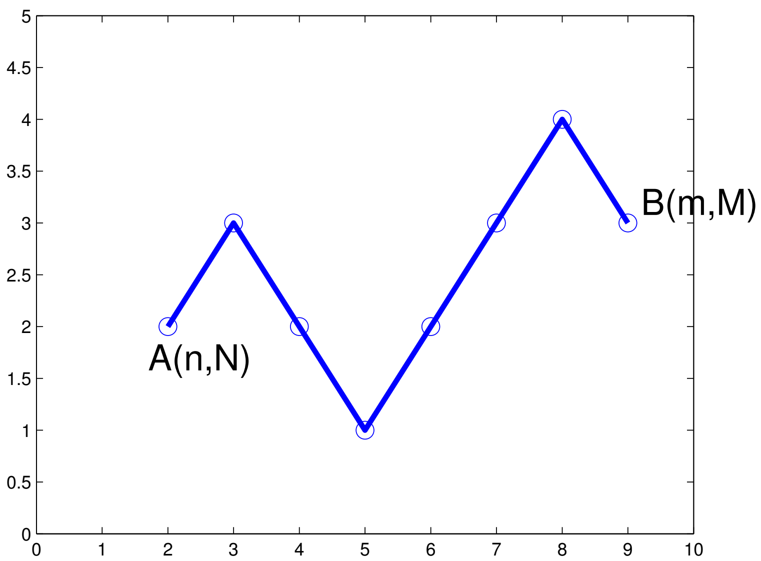

FIGURE 1 – Un chemin

Compter les chemins

a) Dans un chemin entre $A(n, N)$ et $B(m, M)$ quel est le nombre de montées ? De descentes ? Quelles sont les conditions sur n, N, m et M pour qu'un tel chemin existe ?

b) Déterminer $\mathcal{N}((n, N); (m, M))$, le nombre de chemins entre les points de coordonées (n, N) et (m, M).

c) Déterminer $\mathcal{N}_0((n, N); (m, M))$, le nombre de chemins entre les points de coordonées (n, N) et (m, M) ne croisant pas l'axe des abscisses.
(indication : on cherchera un lien entre de tels chemins et des chemins partant de $(n, -N)$)

La ruine du joueur Un joueur qui possède une fortune initiale $G_0 = N$ euros joue contre le casino à un jeu de hasard (de votre choix). Le jeu est constitué de tours indépendants où le joueur gagne un euro avec probabilité p et perd un euro avec probabilité $1-p$. On note G_n la fortune du joueur au bout de la partie n. On considère que le joueur peut 'emprunter' à la banque et avoir une fortune négative au cours du jeu.

a) Le joueur joue une partie de m tours. Comment représenter graphiquement une telle partie ?

b) Calculer $\mathbb{P}(G_m = M | G_0 = N)$, la probabilité pour que le joueur ayant une fortune initiale de N euros possède M euros au bout de m tours.

c) Soit $k \leq m$. Quelle est la probabilité que le joueur emprunte pour la première fois à la banque à l'instant k ?

Le théorème du scrutin Aux dernières élections dans votre commune de naissance, le candidat A a obtenu p voix contre $q < p$ voix pour le candidat B. Quelle est la probabilité que le candidat A ait été en tête tout au long du dépouillement dans cette commune ? (en admettant que l'ordre d'arrivée des voix est équiprobable)

Indication : Comment représenter un dépouillement comme un chemin ?

Solution de l'exercice 1.

Compter les chemins

a) Le nombre de montées n_M et le nombre de descentes n_D vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} n_M + n_D &= m - n, \\ n_M - n_D &= M - N. \end{cases}$$

On en déduit que

$$n_M = \frac{m-n+M-N}{2} \quad \text{et} \quad n_D = \frac{m-n+N-M}{2}$$

Et la condition pour que ces deux quantités soient entières (et donc qu'un tel chemin existe) est que $n-m$ et $N-m$ aient la même parité :

$$n - m \equiv M - N[2]$$

b) Un chemin est caractérisé par l'emplacement de ses montées parmi les $m-n$ pas :

$$\mathcal{N}\left((n,N);(m,M)\right) = C_{m-n}^{\frac{m-n+M-N}{2}}$$

c) Il y a une bijection entre le nombre de chemins allant de A à B et touchant l'axe des abscisses et le nombre de chemin allant du symétrique de A : $\tilde{A}(n,-N)$ à B : On en déduit que

$$\mathcal{N}_0((n,N),(m,M)) = \mathcal{N}((n,N),(m,M)) - \mathcal{N}((n,-N),(m,M))$$

D'où :

$$\mathcal{N}_0((n,N),(m,M)) = C_{m-n}^{\frac{m-n+M-N}{2}} - C_{m-n}^{\frac{m-n+M+N}{2}}.$$

La ruine du joueur

a) Une partie est représentée par un chemin entre $(0,N)$ et (m,G_m).

b) La probabilité d'une partie qui termine avec une fortune M est

$$p^{n_M}(1-p)^{n_D} = p^{\frac{m+M-N}{2}}(1-p)^{\frac{m+N-M}{2}}.$$

Et le nombre de telles parties est $\mathcal{N}((0,N),(m,M))$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(G_m = M | G_0 = N) = C_m^{\frac{m+M-N}{2}} p^{\frac{m+M-N}{2}}(1-p)^{\frac{n+N-M}{2}}.$$

c) Si le joueur commence à emprunter en k c'est que $G_k = -1$. La probabilité d'une partie vérifiant cette condition ne dépend pas de l'histoire de la partie et est égale à :

$$p^{\frac{k-N-1}{2}}(1-p)^{\frac{k+N+1}{2}}.$$

Le nombre de parties conduisant à la situation dans laquelle le joueur commence à emprunter en k est donné par le nombre de chemins de $(0,N)$ à $(k,0)$ ne passant pas par l'axe $y = -1$ aux instant $l < k$. Il y en a autant que de chemins de $(0, N)$ à $(k-1, 0)$ ne passant pas par l'axe $y = -1$.Par translation c'est le nombre de chemins de $(0, N+1)$ à $(k-1, 1)$ ne passant pas par l'axe des abscisses. La probabilité que l'on commence à emprunter à la banque en k est donc :

$$\left(C_{k-1}^{\frac{k-1-N}{2}} - C_{k-1}^{\frac{k+1+N}{2}}\right) p^{\frac{k-N-1}{2}} (1-p)^{\frac{k+N+1}{2}}$$

Le théorème du scrutin Les arrivées de votes étant indépendantes, on peut supposer tous les scrutins equiprobables. L'espace de probabilité associé est donc l'ensemble des scrutins, muni de l'équiprobabilité. Un scrutin peut être représenté par la fonction “nombre de voix pour A - nombre de voix pour B” en fonction du numéro de la voix dépouillée : cela correspond à un chemin entre $(0, 0)$ et $(p+q, p-q)$.

Le nombre total de scrutins possibles est C_{p+q}^{p} (déterminé par les instants de vote pour A). Le nombre de scrutins où A est toujours en tête est égal au nombre de chemins entre $(1, 1)$ et $(p+q, p-q)$ ne rencontrant pas l'axe des abscisses. La probabilité recherchée est alors :

$$\frac{\mathcal{N}_0((1,1),(p+q,p-q))}{C_{p+q}^{p}} = \frac{C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^{p}}{C_{p+q}^{p}} = \frac{p-q}{p+q}.$$