

Dénombrement et calcul des probabilités.

1. Une ligne brisée reliant deux points $A(n, N)$ et $B(m, M)$ du plan est appelée chemin entre A et B : à chaque point du chemin, on passe au point suivant en augmentant l'abscisse de 1 et en augmentant l'ordonnée de 1 (montée) ou en la diminuant de 1 (descente).

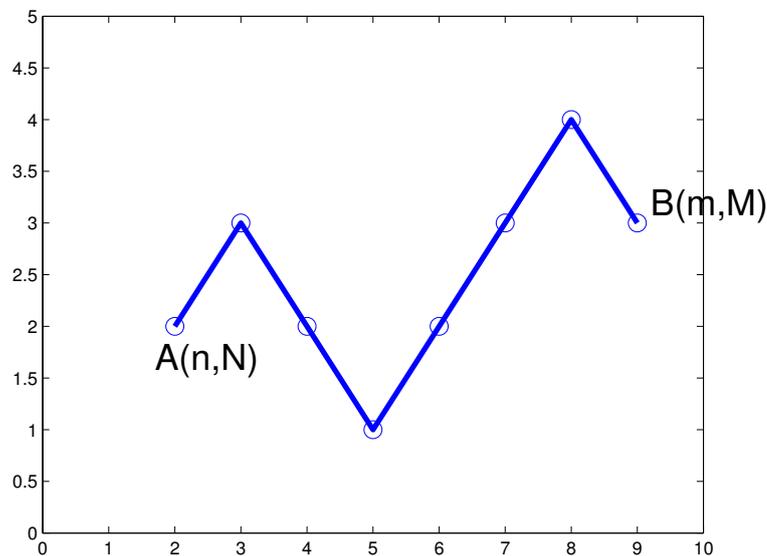


FIGURE 1 – Un chemin

Compter les chemins

- Dans un chemin entre $A(n, N)$ et $B(m, M)$ quel est le nombre de montées? De descentes? Quelles sont les conditions sur n, N, m et M pour qu'un tel chemin existe?
- Déterminer $\mathcal{N}((n, N); (m, M))$, le nombre de chemins entre les points de coordonnées (n, N) et (m, M) .
- Déterminer $\mathcal{N}_0((n, N); (m, M))$, le nombre de chemins entre les points de coordonnées (n, N) et (m, M) ne croisant pas l'axe des abscisses.
(indication : on cherchera un lien entre de tels chemins et des chemins partant de $(n, -N)$)

La ruine du joueur Un joueur qui possède une fortune initiale $G_0 = N$ euros joue contre le casino à un jeu de hasard (de votre choix). Le jeu est constitué de tours indépendants où le joueur gagne un euro avec probabilité p et perd un euro avec probabilité $1 - p$. On note G_n la fortune du joueur au bout de la partie n . On considère que le joueur peut 'emprunter' à la banque et avoir une fortune négative au cours du jeu.

- a) Le joueur joue une partie de m tours. Comment représenter graphiquement une telle partie ?
- b) Calculer $\mathbb{P}(G_m = M | G_0 = N)$, la probabilité pour que le joueur ayant une fortune initiale de N euros possède M euros au bout de m tours.
- c) Soit $k \leq m$. Quelle est la probabilité que le joueur emprunte pour la première fois à la banque à l'instant k ?

Le théorème du scrutin Aux dernières élections dans votre commune de naissance, le candidat A a obtenu p voix contre $q < p$ voix pour le candidat B . Quelle est la probabilité que le candidat A ait été en tête tout au long du dépouillement dans cette commune ? (en admettant que l'ordre d'arrivée des voix est équiprobable)

Indication : Comment représenter un dépouillement comme un chemin ?