# TD3. Fonctions analytiques, exponentielle complexe

## Encore des séries entières...

**Rappels :** Une fonction est analytique sur un ouvert $U$, si elle est développable en série entière au voisinage de tout $z_0$ de $U$. Les séries entières sont **analytiques sur leur disque de convergence** (utilise une famille sommable). Les séries entières sont aussi **holomorphes sur leur disque de convergence** (calcul direct de limite).

**Exercice 1. Transformation d'Abel**

a) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ on pose $B_m^n = \sum_{i=m}^n b_i$. Montrer que pour $n > m$ alors $\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_m^k + a_n B_m^n$

b) En déduire le comportement des séries $\sum_{k=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}$ sur le cercle $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ pour $\alpha > 0$.

**Exercice 2. Formule de Cauchy pour les fonctions analytiques**

a) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que pour tout $r \in [0, R[$, on a :
$$\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$
en déduire les inégalités de Cauchy :
$$|a_n| r^n \leq \max_{|z|=r} |f(z)|$$
Montrer que s'il y a égalité pour un entier $n$ alors $f(z) = a_n z^n$.

b) En déduire (appliquer à $n = 0$ au DSE en $z_0$) qu'une fonction analytique sur un ouvert $U$ telle que $|f|$ admette un maximum local $|f(z_0)|$ en $z_0 \in U$ est constante.

## Exponentielle et fonctions trigonométriques

**Exercice 3.** Quelle est l'image par l'exponentielle des droites $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$ ?

**Exercice 4.** Soit $f$ une fonction analytique non nulle sur un ouvert connexe $U$ de $\mathbb{C}$ contenant 0 vérifiant pour tous $z, z'$ in $U$ tels que $z + z' \in U$,
$$f(z + z') = f(z)f(z')$$
Montrer qu'il existe un nombre complexe $b$ tel que $f(z) = e^{bz}$.

**Exercice 5.** On veut montrer pour tout $z \in \mathbb{C}$, que $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (1).

a) *Question préliminaire* Justifier que pour tout $k \leq n$ : $\binom{n+p}{k} > \frac{1}{k!} \geq \binom{n}{k}$

b) Rappeler pourquoi (1) est vraie pour $z$ réel.

c) Montrer que pour $z$ complexe, la suite $u_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ est de Cauchy donc convergente

d) En introduisant $w_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ montrer que pour $x$ réel, $u_n(x) \geq w_n(x) \geq u_{n+p}(x)$ et conclure. (étudier $|w_n(z) - u_n(z)|$ et se ramener au cas réel)

**Exercice 6.**

a) Montrer que $\cos(x+iy) = \cos(x)\mathrm{ch}(y) - i\sin(x)\mathrm{sh}(y)$

b) Pour quels $z$ a-t-on $\cos(z) \in \mathbb{R}$ ? $\cos(z) \in [-1;1]$ ?

c) Résoudre $\cos(z) = 0$, $\sin(z) = 0$, $\cos(z) = 2$ pour $\cos(z) = -i$.

## Principe du prolongement analytique et zéros isolés

**Rappels :** Le principe du prolongement analytique (et celui des zéros isolés) peuvent être résumés par le corollaire 2.2.18 du poly : Si $\Omega$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g$ sont analytiques, **si l'ensemble** $\{z \in \Omega, f(z) = g(z)\}$ **a un point d'accumulation *dans* $\Omega$, alors** $f = g$.

**Exercice 7.**

a) Déterminer les fonctions analytiques sur $D(0,1)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$

b) Déterminer les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}$

c) Soit $f$ une fonction analytique sur $D(0,1)$ telle qu'il existe une suite $a_n$ de réels distincts de $[-1/2; 1/2]$ telle que $f(a_n) \in \mathbb{R}$. Montrer qu'alors $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ sur $D(0,1)$.

d) Que dire si cette suite $a_n$ est décroissante et tend vers 0, et si de plus $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1}) \forall n \in \mathbb{N}$ ?

**Exercice 8.** Soit $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$. Montrer que $f$ est analytique sur le disque ouvert $|z| < 1$. Quels sont ses zéros sur le disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

**Exercice 9. Zéros des fonctions analytiques** Soit $f$ une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ et $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros.

a) Donner un exemple de fonction non constante telle que $Z(f) = \emptyset$

b) Donner un exemple de fonction non constante telle que $Z(f)$ est infini

c) Montrer que pour tout compact $K$ , $Z(f) \cap K$ est fini

d) Montrer que $Z(f)$ est dénombrable