Université Pierre et Marie Curie — LM367
Licence de Mathématiques L3 — 2011-2012

Corrigé partiel de l'interro 1

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe vérifiant $Re(f) = P$ et $f(0) = 0$. Il existe $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que f se mette sous la forme $f = P + iQ$. f étant holomorphe, on a alors d'après les conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

On a donc, en dérivant partiellement P :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y} &= e^{-x}(-x\sin(y) + \sin(y) + y\cos(y)) \quad (1) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= e^{-x}(-x\cos(y) + \cos(y) - y\sin(y)) \quad (2) \end{cases}$$

En intégrant (1) par rapport à y il existe une fonction réelle c telle que

$$Q(x, y) = e^{-x}(x\cos(y) + y\sin(y)) + c(x)$$

Et en dérivant cette dernière relation par rapport à x on obtient d'après (2) :

$$-e^{-x}(x\cos(y) + y\sin(y)) + e^{-x}\cos(y) + c'(x) = e^{-x}(-x\cos(y) + \cos(y) - y\sin(y))$$

d'où $c'(x) = 0$ et $c(x) = c$, une constante. La condition $f(0) = 0$ impose de plus $Q(0, 0) = 0$ et donc $c = 0$.

On a donc montré que la seule fonction Q telle que $f = P + iQ$ soit holomorphe est

$$Q(x, y) = e^{-x}(x\cos(y) + y\sin(y))$$

On a alors

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-x}(x\sin(y) - y\cos(y) + ix\cos(y) + iy\sin(y)) \\ &= e^{-x}(x(\sin(y) + i\cos(y)) + iy(i\cos(y) + \sin(y))) \\ &= e^{-x}(x + iy)ie^{-iy} = ize^{-z} \end{aligned}$$

et donc f vérifie bien les conditions demandées.

Exercice 2.

- La fonction $f_0(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ avec $\arg(z) \in] -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est continue sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ et vérifie $\exp(f_0(z)) = z$, c'est donc une détermination du logarithme sur cet ouvert. Toutes les déterminations du logarithmes sur cet ouvert sont donc de la forme $f_0 + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme $f_0(1) = 0$, la seule détermination vérifiant $f(1) = 0$ correspond à $k = 0$ et donc à f_0.
- On calcule d'après la formule explicite, en prenant bien soin de prendre l'argument dans l'intervalle annoncé $] -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned} f(-2i) &= \ln(2) - i\frac{\pi}{2} \\ f(-5) &= \ln(5) - i\pi \\ f(-1+i) &= \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

- Log est définie sur $\mathbb{C}\setminus\{z : \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$. f et Log deux déterminations du logarithme sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}\setminus\{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$ diffèrent d'un multiple de $2i\pi$ or elles sont égales en 1, donc elles coïncident sur tout cet ouvert. Sur le complémentaire on a $Log = f + 2i\pi$ (vérifier par exemple en $-1+i$).
- On vérifie que $g_C'(z) = \frac{1}{z}$ donc g_C est à une constante près une détermination du logarithme. Il existe donc une valeur de C telle que $g_C = f$. Comme $g_C(-2i) = 0$ et que $f(-2i) = \ln(2) - i\frac{\pi}{2}$, il faut prendre $C = \ln(2) - i\frac{\pi}{2}$. g coïncide aussi avec Log puisque f et Log sont égales sur U.