Université Pierre et Marie Curie 2013-2014
Probabilités et statistiques - LM345

Comment calculer la loi d'une variable aléatoire ?

La première chose à regarder est l'ensemble dans lequel la variable aléatoire prend ses valeurs. Vous devez savoir calculer la loi d'une *variable aléatoire discrète* (à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou un ensemble fini), d'une *variable aléatoire réelle* (à valeurs dans $\mathbb{R}$), et d'un *vecteur aléatoire* (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ avec $d > 1$) - souvent un couple de v.a. $Z = (X, Y)$.

Donner la loi d'une variable aléatoire, c'est donner un moyen de calculer la valeur de $\mathbb{P}(X \in A)$ pour A une partie quelconque de $\mathbb{N}$ (cas discret) ou un borélien quelconque de $\mathbb{R}^d$ (cas réel ou vecteur alétoire).

I - Loi d'une v.a. discrète Toute partie A de $\mathbb{N}$ étant une réunion dénombrable de sigletons $\{n\}$, on obtient la probabilité de l'événement $(X \in A)$ à partir des probablités des événements $(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner une loi discrète est simplement donner les valeurs des

$$\mathbb{P}(X = n) \quad \text{pour tout } n \quad \text{dans } \mathbb{N} \text{ (ou une partie finie de } \mathbb{N})$$

On dira **'X suit la loi discrète donnée par** $\mathbb{P}(X = n) = \dots$**'** (et si possible on reconnaîtra une loi connue !).

II - Loi d'une v.a. dans $\mathbb{R}^d$: calcul de la fonction de répartition La fonction de répartition caractérise la loi. Il suffit alors donner les valeurs de la fonction

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \; \forall x \in \mathbb{R} \; \textit{(cas réel)}$$

ou pour un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ de donner les valeurs de la fonction

$$F_X(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}((X_1 \leq x_1) \cap \dots \cap (X_d \leq x_d)) \; \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

On dira **'X suit la loi de fonction de répartition** $F_X(x) = \dots$**'** (et si possible on reconnaîtra la fonction de répartition d'une loi connue !).

III - Loi d'une va. dans $\mathbb{R}^d$: calcul de la densité Une grande partie des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$ sont des variables dites à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Cela signifie qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, appelée densité, vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} f = 1$ et pour tout borélien A,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

Dans ce cas, donner la densité détermine complètement la loi. Deux méthodes pour calculer la densité :

a) S'il existe une fonction f telle que la fonction de répartition s'écrive

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \textit{(cas réel)} \\ F_{(X_1,\ldots,X_d)}(x_1,\ldots,x_n) &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f(t_1,\ldots,t_d)dt_1\ldots dt_d \ \textit{(cas général)} \end{aligned}$$

alors la loi de X admet pour densité f.

b) Si il existe une fonction f telle que pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (pour $d \geq 1$) on ait

$$\mathbb{E}[g(X_1,\ldots,X_d)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1,\ldots,x_d)f(x_1,\ldots,x_d)dx_1\ldots dx_d \quad \textit{(cas général)}$$

alors la loi de X admet pour densité f.

On dira **'X suit la loi de densité** $f(t) = ...$ **par rapport à la mesure de Lebesgue'** (et on reconnaîtra si possible la densité d'une loi connue !).

IV - Calcul de la fonction génératrice ou fonction caractéristique Vous avez vu que pour une variable discrète, la fonction caractéristique $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$ caractérise la loi. On dira **'X suit la loi ayant pour fonction caractéristique** $G_X(s) = ...$' (et on reconnaîtra si possible la fonction caractéristique d'une loi connue !).

Cette méthode se généralisera plus tard aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$) avec l'introduction de la fonction caractéristique. Elle est très efficace pour calculer la loi d'une somme de v.a. indépendantes.

X suit la loi	$\mathbb{P}(X = n)$	$\mathbb{E}[X] =$	$G_X(s) =$
Bernoulli de paramère p $X \sim \mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p(= q)$ $\mathbb{P}(X = 1) = p$	p	$1 - p + sp$
Binomiale de paramètres n et p $X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$\forall k \in \{0, \ldots n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	$(1 - p + sp)^n$
Géométrique de paramètre p $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{1-sp}$
Poisson de paramètre λ $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	$e^{\lambda(s-1)}$

X suit la loi	densité $f(t)$	f.d.r $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
Uniforme sur $[a, b]$ $X \sim \mathcal{U}([a, b])$	$f_X(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$	$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b[}(x)$ $+\mathbb{1}_{[b,+\infty[}(x)$
Exponentielle de paramètre λ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$f_X(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$	$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$
Normale centrée réduite $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$	$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	
Normale de paramètres μ et σ^2 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	