Université Pierre et Marie Curie — 2013-2014
Calcul matriciel 1M004 - groupe 23.2 — 31 mars 2014

Contrôle continu 2.

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

1. (*7 pts*) Soit m un paramètre réel. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})_m$ défini par

$$\begin{cases} 2x & + & my & - & 2z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & mz & = & m \\ -x & + & y & + & z & = & -1 \end{cases}$$

a) Ecrire ce système sous la forme matricielle $A_m X = Y_m$.

b) Calculer $\det(A_m)$ pour toute valeur de m.

c) Pour quelles valeurs de m le système $(\mathcal{S})_m$ admet-t-il une solution unique ?

d) Résoudre le système $(\mathcal{S}_m)$ pour toute valeur de m.

2. (*7 pts*) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) La matrice A est-elle inversible ?

b) Montrer qu'on a la relation $A^2 + A = 2\mathrm{I}_3$.

c) En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A puis la valeur de A^{-1}.

d) Calculer l'inverse de A par une méthode différente de votre choix (et retrouver le résulat de la question précédente).

3. (*6 pts*) Soient f et g les applications linéaires définies par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+2z, y, -x+y+3z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, y-x, x) \end{array}$$

a) Déterminer A, la matrice de l'application f dans la base canonique, et B la matrice de l'application g dans la base canonique.

b) Calculer la matrice $C = AB$ et écrire l'application linéaire qui admet pour matrice C dans la base canonique.

c) Déterminer, lorsqu'elles sont calculables, les applications linéaires composées $f \circ g$ et $g \circ f$ et leur matrice. Que remarque-t-on ?