Université Pierre et Marie Curie 2013-2014
Calcul matriciel 1M004 - groupe 23.2 10 mars 2014

Corrigé du CC 1.

1.

a) Le système $(\mathcal{S})_m$ s'écrit $AX = Y$ avec

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & -m \\ m-1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Le système admet une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = 2(m-1) - (-m)(m-1) = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2)$$

(Δ vaut 9 pour le trinôme $m^2 + m - 2$ ce qui conduit aux racine 1 et -2 et à la factorisation ci-dessus). Ainsi $(\mathcal{S})_m$ admet une solution unique ssi $m \neq 1$ et $m \neq -2$.

c) Pour $m = 1$, $(\mathcal{S})_m$ est équivalent a $-y = 1$ et $2y = 1$, donc $(\mathcal{S})_m$ n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \varnothing$

Pour $m = -2$, les deux équations sont identiques et $(\mathcal{S})_m$ est équivalent à $-3x - 2y = 1$, qui est l'équation d'une droite. Donc $(\mathcal{S})_m$ admet une infinité de solution : $\mathcal{S} = \left\{ \left(x, -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right), x \in \mathbb{R} \right\}$

Pour $m \neq 1, -2$, l'unique solution est donnée par

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}Y = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 2 & m \\ -(m-1) & (m-1) \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(m-1)(m+2)} \begin{pmatrix} 2 & m \\ -(m-1) & (m-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(m-1)(m+2)} \begin{pmatrix} m+2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{m-1}, 0 \right) \right\}$.

2.

a) $\det(A) = 1$

b) On a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : \text{"} A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{"}$$

$\mathcal{P}_1$ est vérifiée. En effet si $n = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1\times 2}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A = A^1$$

Soit n tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 1+n+\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{2(1+n)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
Conclusion $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (en fait elle est vraie pour $n = 0$ aussi, avec la convention que $A^0 = I_3$).

3.

a) Résolvons le système $(\mathcal{S})$ par la méthode de Gauss : on rappelle que cette méthode consiste à choisir à chaque étape une équation 'pivot' (qu'on ne touchera pas et que l'on écrit traditionnellement comme première équation) afin d'éliminer la MEME inconnue dans les deux équations.

Dans cet exemple, le premier pivot sera l'équation $x + y + z = 1$ et on va d'abord éliminer x dans la deuxième et la troisième équation.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & z & = & 1 & \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 & (L_2 \leftarrow L_1 + L_2) \\ & - & y & + & 3z & = & 1 & (L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3) \end{array}\right.$$

Maintenant il s'agit de transformer les deux dernières équations en prenant comme nouveau pivot la deuxième équation afin d'éliminer y dans la troisième.

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{S}) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & z & = & 1 & \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 & \\ & & & & 8z & = & 3 & (L_3 \leftarrow L_2 + 2L_3) \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & & & = & 1 - 2z = \frac{2}{8} \\ & & & & z & = & \frac{3}{8} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - y - z = \frac{1}{2} \\ y & = & \frac{1}{8} \\ z & = & \frac{3}{8} \end{array}\right. \end{array}$$

Finalement $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)\right\}$.

b) Une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 4t \\ y & = & t \\ z & = & 1 - 5t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

c) On montre que $u \cdot v = 0$ et $u \cdot w = 0$.

d) Soit $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur $\vec{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - 1 \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix}$.

On a les équivalences suivantes.

$$\begin{array}{rcl} M(x, y, z) \in \mathcal{D} & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \vec{AM} \cdot v & = & 0 \\ \vec{AM} \cdot w & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} -1(x-1) + y + (z-1) & = & 0 \\ 2(x-1) + 3y + (-1)(z-1) & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ 2x + 3y - z & = & 1 \end{array}\right. \end{array}$$

e) $M(x, y, z)$ appartient à l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ si ses coordonnées vérifient simultanément le système d'équations de $\mathcal{D}$ et l'équation de $\mathcal{P}$, c'est à dire le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ 2x+3y-z & = & 1 \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

qui est le système résolu à la question a). L'intersection est donc le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$.